Topologie Algébrique TD1

30 Septembre 2011

1 Langage de Catégorie

Exercice 1.1 (Exemples de catégories) Vérifier que les suivantes sont des catégories : décrire les objets, les morphismes et les règles de composition de morphismes :

1. $\mathfrak{Set}$: les ensembles ;
2. $\mathfrak{Cat}$: les petites catégories ;
3. $\mathfrak{Fct}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$: les foncteurs entre deux catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$;
4. $\mathfrak{Gp}$: les groupes ;
5. $\mathfrak{Ab}$: les groupes abéliens ;
6. $\mathfrak{Ring}$: les anneaux unitaires ;
7. $A-\mathfrak{Mod}$: les A-modules, où A est un anneau unitaire ;
8. $\mathfrak{Alg}_k$: les k-algèbres unitaires (associatives, mais non-nécessairement commutatives), où k est un corps ;
9. $\mathfrak{Alg}_k^c$: les k-algèbres unitaires commutatives, où k est un corps ;
10. $\mathsf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$: les représentations complexes d'un groupe fini G ;
11. $\mathfrak{Top}$: les espaces topologiques ;
12. $\mathfrak{Top}_{\bullet}$: les espaces topologiques pointés ;
13. $\mathfrak{Mfd}$: les variétés différentielles ;
14. $\mathfrak{Mfd}_{\mathbf{C}}$: les variétés complexes ;
15. (les groupes de Lie), réel ou complexe ;
16. (les algèbres de Lie), réel ou complexe ;
17. $\mathfrak{Psh}(X)$: les préfaisceaux abéliens sur un espace topologique X donné ;
18. $\mathfrak{Shv}(X)$: les faisceaux abéliens sur un espace topologique X donné ;
19. (les complexes de groupe) ;
20. (les $\mathbf{R}$−espaces vectoriels topologiques) ;
21. (les espaces mesurables) ;
22. Nouveaux exemples sont bienvenus !!!

Exercice 1.2 En utilisant les exemples dans l'exercice précédent, donner des exemples de :

1. catégories additives ;
2. catégories abéliennes. Décrire les noyaux, conoyaux, images.

3. Sous catégories. Elles sont pleines ?

Indications:

1. Exemples de catégories additives : $\mathfrak{Ab}$, $A-\mathfrak{Mod}$, $\mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$, $\mathfrak{Psh}(X)$, $\mathfrak{Shv}(X)$, (les complexe de groupe), etc.

2. Exemples de catégories abéliennes : $\mathfrak{Ab}$, $A-\mathfrak{Mod}$, $\mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$, $\mathfrak{Psh}(X)$, $\mathfrak{Shv}(X)$, (les complexe de groupe) etc.

3. $\mathfrak{Shv}(X) \subset \mathfrak{Psh}$, $\mathfrak{Ab} \subset \mathfrak{Gp}$ sont des exemples de sous-catégorie pleine.

Remarques :
(a) Le noyau d'un morphisme de faisceaux est le noyau entant que préfaisceaux, mais le conoyau et l'image sont les faisceaux associés au conoyau et l'image de ce morphisme entant qu'un morphisme de préfaisceaux.
(b) La catégorie (les espaces vectoriels topologiques) n'est pas abélienne. Pour simplicité, on explique la raison pour laquelle la catégorie des espaces de Banach n'est pas abélienne. En fait, tout opérateur linéaire borné (*i.e.* continu) $F : X \to Y$ entre deux espaces de Banach admet le noyau (qui est juste le noyau au sens d'algèbre linéaire) et le conoyau (qui est le quotient de Y modulo l'adhérence de $F(X)$ dans Y). Cependant, on peut facilement fabriquer un opérateur qui est injectif, non-surjectif mais avec l'image (au sens d'algèbre linéaire) dense dans Y, donc son noyau et conoyau sont 0, d'où son noyau de conoyau est Y mais son conoyau de noyau est X.
(c) Un exemple de catégorie additive qui n'admet pas de noyau, conoyau, est donné par la catégorie homotopique des complexes de modules. Ou plus, généralement, les catégories triangulaires.

Exercice 1.3 (Exemples de foncteurs) Vérifier que les suivantes sont des foncteurs.

1. (Foncteurs d'oubli) $A-\mathfrak{Mod} \to \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Set}$, $\mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(G) \to \mathbf{C}-\mathfrak{Mod}$, $\mathfrak{Gp} \to \mathfrak{Ab}$, $\mathfrak{Mfd}_{\mathbf{C}} \to \mathfrak{Mfd}$, $\mathfrak{Top}_\bullet \to \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Shv}(X) \to \mathfrak{Psh}(X)$;
2. (Groupes de (co-)homologie, Groupes d'homotopie)
$$\pi_1 : \mathfrak{Top}_\bullet \to \mathfrak{Gp};$$
$$H_i, H^i : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Ab};$$
$$\pi_i : \mathfrak{Top}_\bullet \to \mathfrak{Ab}; (i \geq 2).$$
3. (Algèbre de Lie) Lie : (Groupes de Lie)$\to$ (Algèbres de Lie)
4. (Opérations sur les faisceaux) Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. Construire les foncteurs suivants :
$$f_* : \mathfrak{Shv}(X) \to \mathfrak{Shv}(Y);$$
$$f^{-1} : \mathfrak{Shv}(Y) \to \mathfrak{Shv}(X);$$
$$\Gamma : \mathfrak{Shv}(X) \to \mathfrak{Ab}$$

Indications:

2. On verra dans les cours suivants.

4. Un morphisme de groupes de Lie induit un morphisme d'algèbres de Lie.

Exercice 1.4 (Exemples d'équivalences de catégories) Il faut bien distinguer la notion d'*équivalence* de catégories et celle d'*isomorphisme* de catégories.

1. D'abord, on rappelle une méthode pour établir une équivalence entre deux catégories : soit
$$F : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$$
un foncteur, supposons que F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif, alors F est une équivalence de catégories. Construire un foncteur 'inverse'.
2. Soit k un corps. On considère la catégorie $\mathscr{C}$: les objets sont des nombres entiers positifs : $\mathrm{Obj}\,\mathscr{C} = \mathbf{N}$, et l'ensemble des morphismes entre deux entiers n et m est l'ensemble des matrices de taille $n \times m$ à coefficient dans k, et la composition des morphismes est définie par le produit des matrices. Établir une équivalence de catégorie entre $\mathscr{C}$ et la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie.
3. Soit $K \subset L$ une extension finie galoisienne de corps, reformuler la théorie de Galois par une équivalence de catégories. (Attention au sens des flèches)
4. Soit G un groupe fini, on note $\mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$ la catégorie des représentations linéaires de dimension finie de G sur $\mathbf{C}$. Établir l'équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$ et la catégorie de $\mathbf{C}[G]$-modules de dimension finie, où $\mathbf{C}[G]$ est l'algèbre de groupe G. On note souvent cette catégorie $G-\mathfrak{Mod}$.
5. Soit $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Trouver une $\mathbf{C}$-algèbre A, telle que la catégorie des représentations de $\mathscr{G}$ de dimension finie sur $\mathbf{C}$ est équivalente à la catégorie des A-modules de dimension finie sur $\mathbf{C}$. On la note souvent $\mathscr{G} - \mathfrak{Mod}$.
6. Soit A un anneau unitaire non-commutatif, on défini un anneau A° avec les éléments, la même structure de groupe abélien, mais le produit $a * b$ dans A° est défini comme ba dans A. Établir des équivalences de catégories suivantes :
   - entre $A - \mathfrak{Mod}$ et $\mathfrak{Mod} - A^\circ$;
   - entre $A - \mathfrak{Mod} - B$ et $A \otimes B^\circ - \mathfrak{Mod}$;

Indications:

1. On va définir le foncteur $G : \mathscr{C}_2 \to \mathscr{C}_1$ par la manière suivante. Par la surjectivité essentielle, pour tout objet Y de $\mathscr{C}_2$, on peut choisir un objet $G(Y)$

dans $\mathscr{C}_1$ et fixer un isomorphisme $F(G(Y)) \xrightarrow{\phi_Y} Y$, et puis, pour tout morphisme $Y \xrightarrow{f} Y'$, on définit $\overline{G(f)}$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(G(Y)) & \xrightarrow{\phi_Y} & Y \\ {\scriptstyle \overline{G(f)}}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ F(G(Y')) & \xrightarrow{\phi_{Y'}} & Y' \end{array}$$

Grâce à la pleine fidélité, $\overline{G(f)}$ déterminer un morphisme

$$G(f) : G(Y) \to G(Y').$$

Il reste à vérifier que G est bien un foncteur, et les composés $F \circ G$ et $G \circ F$ sont bien *isomorphes* aux foncteurs identités.

5. $A = U(\mathscr{G})$ est *l'algèbre enveloppante* de $\mathscr{G}$, qui est définie par les générateurs et relations. Comme une algèbre associative elle est engendrée par les éléments de $\mathscr{G}$, modulo les relations de $\mathbf{C}$-linéarité et la relation suivante : pour tout $x, y \in \mathscr{G}$, on pose la relation :

$$xy - yx = [x, y],$$

où la multiplication est la multiplication dans l'algèbre enveloppante, est le crochet est le crochet de Lie dans $\mathscr{G}$.

Exercice 1.5 (Foncteurs adjoints) Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ deux catégories, et $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ des foncteurs. Par définition, on dit que (F, G) est une paire de *foncteurs adjoints*, ou plus précisément, F est *adjoint à gauche* de G, ou bien G est *adjoint à droite* de F, s'il existe deux morphismes de foncteurs,

$$\epsilon : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}},$$

$$\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to G \circ F$$

tels que les morphisme induits

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G$$

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\epsilon F} F$$

sont des identités. On appelle ϵ et η les *adjonctions.*

1. Pour tout $X \in \mathsf{Obj}(\mathscr{C})$ et $Y \in \mathsf{Obj}(\mathscr{D})$, on a un isomorphisme qui est fonctoriel en X et en Y :

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)).$$

Autrement dit, on a un isomorphisme de bi-foncteurs :

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(-), -) \simeq \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(-, G(-)).$$

Comment reconstruire les adjonctions à partir de cet isomorphisme ?

2. (**Isomorphisme de Cartan**) Soient $A, B \in \mathfrak{Ring}$ deux anneaux unitaires, soit $M \in A-\mathfrak{Mod}-B$ un bimodule. On considère deux foncteurs :

$$M \otimes_B - : B - \mathfrak{Mod} \to A - \mathfrak{Mod}$$

$$\mathrm{Hom}_A(M, -) : A - \mathfrak{Mod} \to B - \mathfrak{Mod}$$

Montrer qu'ils font bien une paire de foncteurs adjoints.

3. (**Exemples**) En principe, on peut souvent reformuler une propriété universelle en utilisant le langage de foncteur adjoint :
(a) Donner les foncteurs adjoints à gauche des foncteurs d'oubli suivants : $\mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Gp} \to \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Top}_\bullet \to \mathfrak{Top}$, $\mathfrak{Top} \to \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Shv}(X) \to \mathfrak{Psh}(X)$, où X est un espace topologique.
(b) Donner le foncteur adjoint à gauche du foncteur qui associe une k-algèbre son groupe des éléments inversibles :

$$^\times : \mathfrak{Alg}_k \to \mathfrak{Gp}\,.$$

(c) Donner le foncteur adjoint à gauche du foncteur qui associe une $\mathbf{C}$-algèbre son algèbre de Lie complexe correspondante (le crochet de Lie est donné par le commutateur).

4. (**Limites projectives et limites inductives**) Soit $\mathscr{I}$ une petite catégorie, $\mathscr{C}$ une catégorie. On considère la catégorie $\mathscr{D} := \mathfrak{Fct}(\mathscr{I}, \mathscr{C})$ des foncteurs de $\mathscr{I}$ vers $\mathscr{C}$. On a un foncteur

$$\underline{\ \ } : \mathscr{C} \to \mathscr{D} = \mathfrak{Fct}(\mathscr{I}, \mathscr{C})$$

qui envoie un objet A de $\mathscr{C}$ au foncteur 'constant' $\underline{A}$ qui associe tout objet de $\mathscr{I}$ l'objet A et associe toute flèche dans $\mathscr{I}$ le morphisme $\mathbf{id}_A$.
(a) Si le foncteur $\underline{\ \ }$ admet un adjoint à gauche, noté $\varinjlim$, on dit que $\mathscr{C}$ admet les *limites inductives* indexées par $\mathscr{I}$. Si le foncteur $\underline{\ \ }$ admet un adjoint à droit, noté $\varprojlim$, on dit que $\mathscr{C}$ admet les *limites projectives* indexées par $\mathscr{I}$. Reformuler la définition de limite projective et inductive par certaine propriétés universelles.
(b) On suppose $\mathscr{I}$ est la catégorie suivante :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}$$

et $\mathscr{I}^{op}$ est la catégorie opposée.
Existe-t-il la limite projective ou inductive indexée par $\mathscr{I}$ ou $\mathscr{I}^{op}$, si

$$\mathscr{C} = \mathfrak{Set}, \mathfrak{Top}, \mathfrak{Ab}, \mathfrak{Gp}, \mathfrak{Alg}_k^c?$$

Décrire les limites.
(c) Si $\mathscr{I}$ est une catégorie discrète, on appelle la limite projective *produit*, et la limite inductive *coproduit*. Décrire le produit et le coproduit dans la catégorie $\mathfrak{Set}, \mathfrak{Top}, \mathfrak{Gp}, \mathfrak{Ab}, \mathfrak{Alg}_k^c$.

Indications:

1. **Étape (1)**. On construit un morphisme

$$\Phi : \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(X, G(Y))$$

par la façon suivante : si on se donne $f : F(X) \to Y$, en appliquant le foncteur G à cette flèche, on obtient $G(f) : GF(X) \to G(Y)$. D'autre part, on applique l'adjonction η à l'objet X pour obtenir une flèche $\eta_X : X \to GF(X)$. Enfin, on définit le morphisme $\Phi(f) : X \to G(Y)$ cherché comme la composition $\Phi(f) := G(f) \circ \eta_X$.
Étape (2). On construit un morphisme

$$\Psi : \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(X), Y)$$

de la même manière : soit $g : X \to G(Y)$ un morphisme dans $\mathscr{C}$, on définit

$$\Psi(g) : F(X) \xrightarrow{F(g)} FG(Y) \xrightarrow{\epsilon_Y} Y$$

le morphisme dans $\mathscr{D}$.
Étape (3). On vérifie $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[d, "F(\eta_X)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{F(X)}"] & \\
FGF(X) \arrow[r, "\epsilon_{F(X)}"] \arrow[d, "FG(f)"] & F(X) \arrow[d, "f"] \\
FG(Y) \arrow[r, "\epsilon_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

On veut démontrer que la composition des flèches verticales à gauche avec la flèche horizontale en bas soit f, mais ca devient évident si on fait le tour par l'autre chemin.
Étape (4). Analogue à l'étape 3. Donc on a bien deux isomorphismes donnés par Φ et Ψ fonctoriels en X et en Y :

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)).$$

Étape (5). Pour récupérer les adjonctions à partir de Φ et Ψ. On prend $Y = F(X)$ et regarde $\Phi(\mathrm{id}_{F(X)})$ pour obtenir η d'une part, et prend $X = G(Y)$ et définit ϵ_Y comme $\Psi(\mathrm{id}_{G(Y)})$ d'autre part.

3. (a) Les foncteurs adjoints à gauche sont donnés par :
– Groupe abélien libre engendré par l'ensemble ;
– groupe libre engendré par l'ensemble ;
– somme disjoint avec un nouveau point, qui est pris comme le point base ;
– l'ensemble muni de la topologie discrète ;
– le faisceau associé au préfaisceau.

(b) Le foncteur adjoint g̀auche est associer un groupe son algèbre de groupe.
(c) Le foncteur adjoint à gauche est associer une algèbre de Lie son algèbre enveloppante.

4. (b)(c) Dans $\mathfrak{Set}$, les deux limites toujours existent, et les constructions sont assez classiques : la limite projective est le sous-ensemble du produit cartésien consisté des systèmes compatibles, et la limite inductive est le quotient du réunion disjoint modulo la relation d'équivalence engendrée par l'identification d'un élément à son image sous une flèche.
Dans $\mathfrak{Top}$, la limite projective est la limite projective dans $\mathfrak{Set}$ muni de la topologie initiale, et la limite inductive est la limite inductive dans $\mathfrak{Set}$ muni de la topologie finale.
Dans $\mathfrak{Ab}$, la limite projective est la limite projective comme ensembles avec la loi d'addition terme à terme, et la limite inductive est le quotient de la somme directe modulo le sous groupe abélien engendré par la différence d'un élément avec son image sous une flèche.
Dans $\mathfrak{Gp}$, la limite projective est la limite projective comme ensembles avec la loi de groupe terme à terme, et la limite inductive est le quotient du produit libre modulo le sous groupe normal engendré par les produits de la forme : le produit de l'inverse d'un élément avec son image sous une flèche, et le produit de l'image d'un élément sous une flèche avec cet élément. Par exemple, le 'push-out' est juste le produit amalgamé
Dans $\mathfrak{Ring}$ et $\mathfrak{Alg}_k$ les limites projectives ou inductives n'existent pas.
Dans $\mathfrak{Alg}_k^c$ la limite projective n'existe pas, mais la limite inductive existe, par exemple, les coproduits sont les produits tensoriels sur k, et le 'push-out' est le produit tensoriel de l'algèbre en bas avec l'algèbre à droit sur l'algèbre à gauche en haut.

Exercice 1.6 (Équivalence de Morita) 1. Soit k un corps. Soient A,B deux k-algèbres (non-commutatives en générale). On se donne deux bimodules $M \in B - \mathfrak{Mod} - A$, $N \in A - \mathfrak{Mod} - B$. Supposons $M \otimes_A N \simeq B$ dans $B - \mathfrak{Mod} - B$, et $N \otimes_B M \simeq A$ dans $A - \mathfrak{Mod} - A$. Donner une équivalence de catégorie entre $A - \mathfrak{Mod}$ et $B - \mathfrak{Mod}$ en utilisant certains foncteurs de produit tensoriel avec M et N. On dit que A et B sont *Morita équivalents* par M, N.

2. Comme un exemple, montrer que A est Morita équivalent à $\mathbf{Mat}_n(A)$, et préciser M, N correspondants.

3. On suppose que A et B sont Morita équivalents par M, N comme ci-dessus, montrer que $A \otimes_k A^\circ$ et $B \otimes_k B^\circ$ sont Morita équivalents par $M \otimes_k N$ et $N \otimes_k M$. (Clarifier d'abord la structure de 'quadri-module' la-dessus).

4. Montrer que si A et B sont Morita équivalents, alors les centres ZA et ZB sont isomorphes comme k-algèbres. (Indication : quel est l'image de A sous l'équivalence de catégorie entre $A - \mathfrak{Mod} - A$ et $B - \mathfrak{Mod} - B$?)

5. Donner une preuve catégorique du fait que le centre de $\mathbf{Mat}_n(A)$ est ZA vu comme des matrices scalaires.

6. * (**Théorème de Morita**) La réciproque de 1. est vraie : on suppose que les deux catégories $A - \mathfrak{Mod}$ et $B - \mathfrak{Mod}$ sont équivalentes. Alors il existe une paire de modules $M \in B - \mathfrak{Mod} - A$, $N \in A - \mathfrak{Mod} - B$, telle que $M \otimes_A N \simeq B$ dans $B - \mathfrak{Mod} - B$, et $N \otimes_B M \simeq A$ dans $A - \mathfrak{Mod} - A$.
7. Soient A, B deux k-algèbres *commutatives*, alors $A - \mathfrak{Mod}$ est équivalente à $B - \mathfrak{Mod}$ si et seulement si A est isomorphe à B entant k-algèbres.

Indications:

1. Les équivalences sont les deux foncteurs suivants :

$$M \otimes_A \bullet : A - \mathfrak{Mod} \to B - \mathfrak{Mod}$$

et

$$N \otimes_B \bullet : B - \mathfrak{Mod} \to A - \mathfrak{Mod}\,.$$

Donc la composition, $N \otimes_B (M \otimes_A \bullet) \simeq (N \otimes_B) M \otimes_A \bullet \simeq A \otimes_A \bullet \simeq \bullet$, dans $A - \mathfrak{Mod}$. L'autre composition est aussi isomorphe à l'identité.

2. On prend $M := \underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{n}$ avec une action de A à gauche par la multiplication terme à terme, et une action de $\mathrm{Mat}_n(A)$ à droit sous la règle de multiplication des matrices. On prend N le 'transposé' de M, c'est-à-dire, un élément de N est un vecteur de colonne dans A. L'action de $\mathrm{Mat}_n(A)$ à gauche est sous la règle de multiplication des matrices, et l'action de A à droit est définie terme à terme.

3. Voir le polycopie de M.Broué.

4. L'image de A sous l'équivalence de catégorie entre $A - \mathfrak{Mod} - A$ et $B - \mathfrak{Mod} - B$ est B. Donc on a bien $\mathrm{Ent}_{A \otimes A^{op}}(A) \simeq \mathrm{Ent}_{B \otimes B^{op}}(B)$. Il est facile à vérifier que $\mathrm{Ent}_{A \otimes A^{op}}(A) = ZA$, donc $ZA \simeq ZB$.

5. C'est une conséquence immédiate de 2. et 4.

6. Voir le polycopie de M.Broué.

7. Une conséquence immédiate de 4.